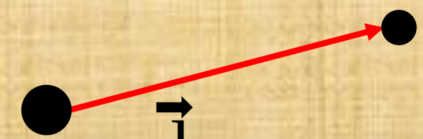
# Dinamica unui dielectric lichid, atras de un condensator cilindric

Prof.dr Emilia Poll

Colegiul Național “Al. I. Cuza”
Focșani

*Dielectricul* este acel material care modifică în chip esenţial câmpul electric în spaţiul pe care-l ocupă, în sensul scăderii câmpului faţă de valoarea câmpului polarizant, rămânând însa diferit de zero.

Procesul prin care un dielectric capătă, în ansamblu, un moment de dipol sub acţiunea câmpului, se numeste *polarizare* .



$\vec{l}$

$$\vec{p} = Q\,\vec{l}$$

Momentul de dipol se măsoară în Debye: 1D= $1/10^{18}$ electrostatic units(e.s.u.)

1D= $0{,}33/10^{30}$ Cm

# Dielectrici polari

- substanţe cu molecule asimetrice şi care posedă un moment de dipol *permanent*, deoarece centrele de masa ale sarcinilor +/_ nu coincid (molecule polare);

-în absenţa unui câmp electric exterior orientarea dipolilor moleculari este aleatorie(datorită agitaţiei termice);

-în prezenţa unui câmp electric exterior, asupra fiecărui dipol acţionează un cuplu de forţe care tinde să-l rotească pentru a-l aduce paralel cu direcţia câmpului, în stare de energie minimă;

- se polarizează prin ***orientare (polarizare orientaţională);***

-exemple : moleculele biatomice heteroatomice(fomată din doi atomi diferiţi ) :HCl, KCl, CO,$H_2O$, etc.

# Dielectrici nepolari

- substanţe cu molecule ce au un grad înalt de simetrie şi nu posedă moment de dipol permanent ( $p=0$ când $E=0$) ;

- dacă dielectricul nepolar este introdus într-un câmp electric E, centrele sarcinilor negative /pozitive nu mai coincid , deci moleculele nepolare capătă un moment de dipol indus ;

-aceşti dipoli există atât timp cât acţionează campul electric , sunt paraleli cu acesta şi sunt cu atât mai mari cu cât câmpul e mai mare ;

- se polarizeaza prin ***deformare*** ;

- exemple :- atomii gazelor nobile, care au paturi electronice complete,

  -moleculele gazelor biatomice: $H_2$, $N_2$ , $O_2$ ,

  -molecule poliatomice cu un înalt grad de simetrie: $CO_2$, $CH_4$, etc.

Se numeste *condensator* orice ansamblu binar de conductoare separate printr-un mediu dielectric sau vid , aflate la influenţă electrostatică maximă (sau totală).

Mărimea pozitivă definită de raportul dintre sarcina unuia dintre conductoare şi diferenţa de potenţial dintre el şi celălalt se numeşte *capacitatea electrică* a condensatorului.

$$\mathbf{C=Q/U_{12}}$$

Acum , putem defini *Faradul* ca fiind capacitatea unui condensator electric , care, având aplicată la armăturile sale o diferenţă de potenţial de un volt, se încarcă cu o sarcina de un coulomb.

# Rezumat

- **Este studiată dinamica unui lichid atras de un condensator cilindric vertical.**
- **Contrar cu ceea ce s-ar putea înţelege din calculul standard al forţei exercitate de condensator, deplasarea dielectricului este diferită şi diferă dacă sarcina sau tensiunea condensatorului ramân constante sau se modifică.**
- **Folosind ipoteza că:**

**1) tensiunea rămâne constantă;**

**2) sarcina este constantă**

**deplasarea este descrisă în detalii calitative şi cantitative.**

# Introducere

**Lucrarea este structurată astfel:**

- **În secţiunea 2, este calculată forţa exercitată de condensatorul cilindric vertical asupra dielectricului.**
- **În secţiunea 3, este prezentată ecuaţia deplasării lichidului.**
- **În secţiunea 4, este prezentată ecuaţia deplasării lichidului *în cazul tensiunii constante*, într-o abordare *calitativă*- aproape de marginea condensatorului, respectiv *cantitativă*- în interiorul condensatorului.**
- **În secţiunea 5 este studiată ecuaţia mişcării dielectricului, în interiorul condensatorului, în cazul menţinerii constante a sarcinii electrice.**
- **În secţiunea 6 sunt prezentate concluziile.**

*Condensatorul cilindric* este format din doi cilindri metalici coaxiali de raze $R_1$ si $R_2$, lungimea lor fiind foarte mare,(practic infinită), în raport cu diferenţa diametrelor lor.

Fie $U_{12} = V_1 - V_2$ diferenţa de potenţial aplicată celor două armături

Câmpul electric între aceste două armături (când ele sunt foarte lungi) va avea simetrie radială, depinzând numai de distanta r de la axul condensatorului

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{E} 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (1)$$

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (2)$$

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{ln\frac{R_2}{R_1}} \qquad (3)$$

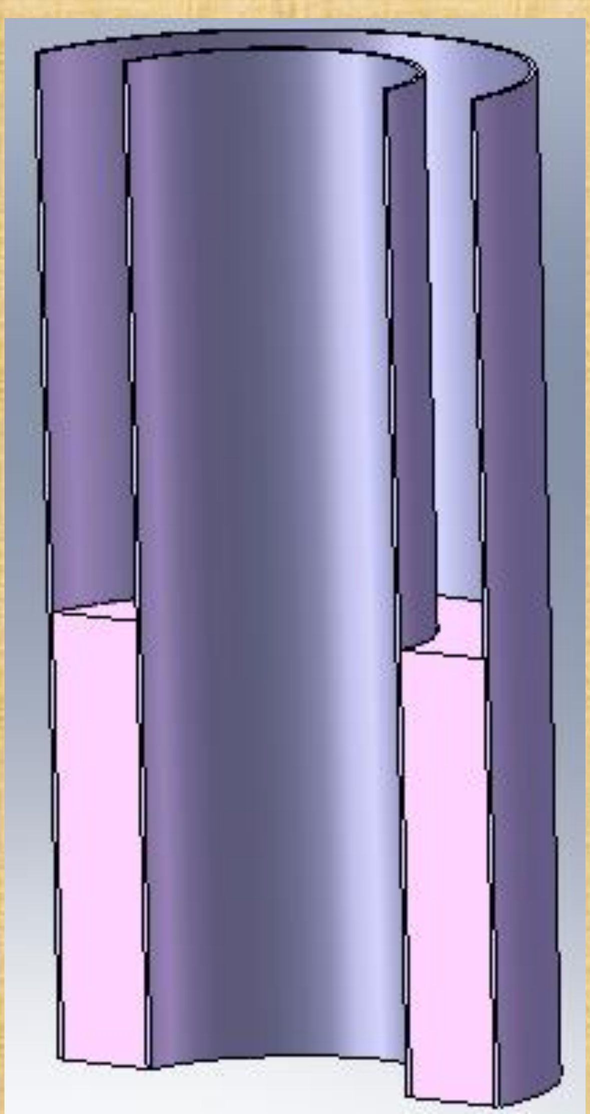
## 2. Forţa exercitată de un condensator cilindric asupra unui dielectric lichid

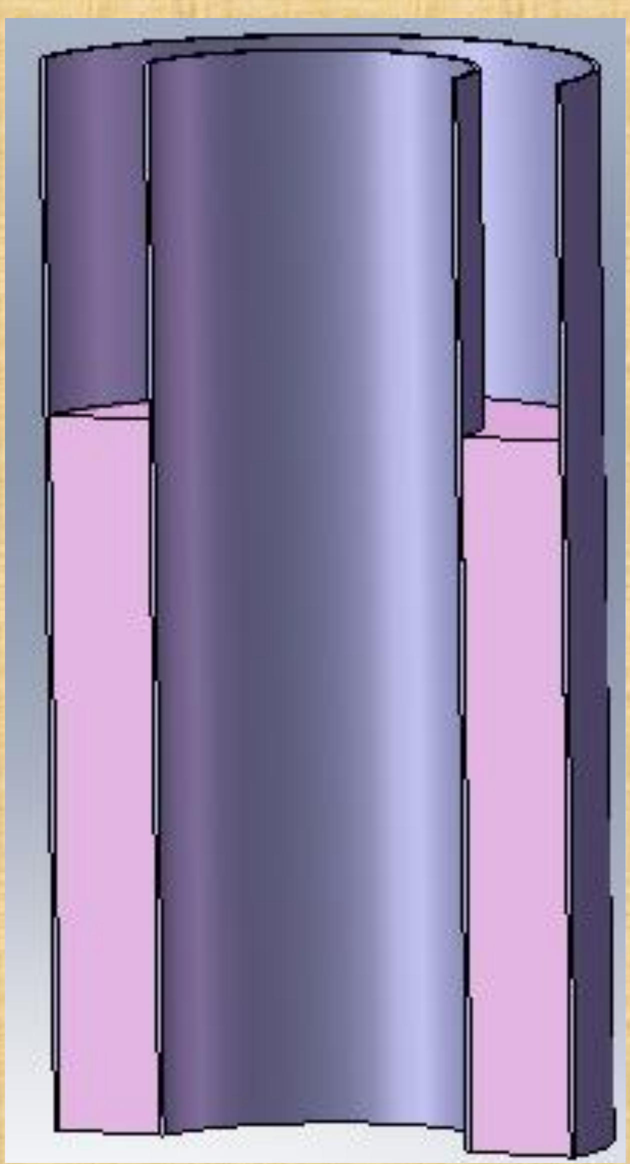
Condensatorul cilindric

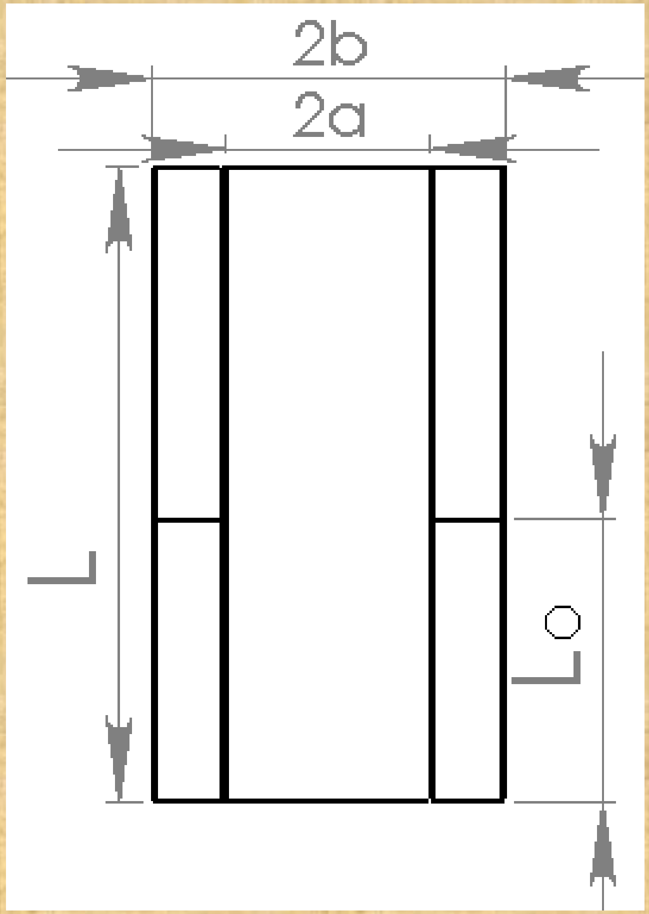
- are dimensiunile: -lungimea L;
  - razele , interioară şi exterioară: a si b, cu L>> b
- este aşezat vertical ;
- este cufundat parţial într-un dielectric lichid, pe o distanta $L_O$, pentru $U = 0$ si $L_O + x$ atunci cand $U \neq 0$;

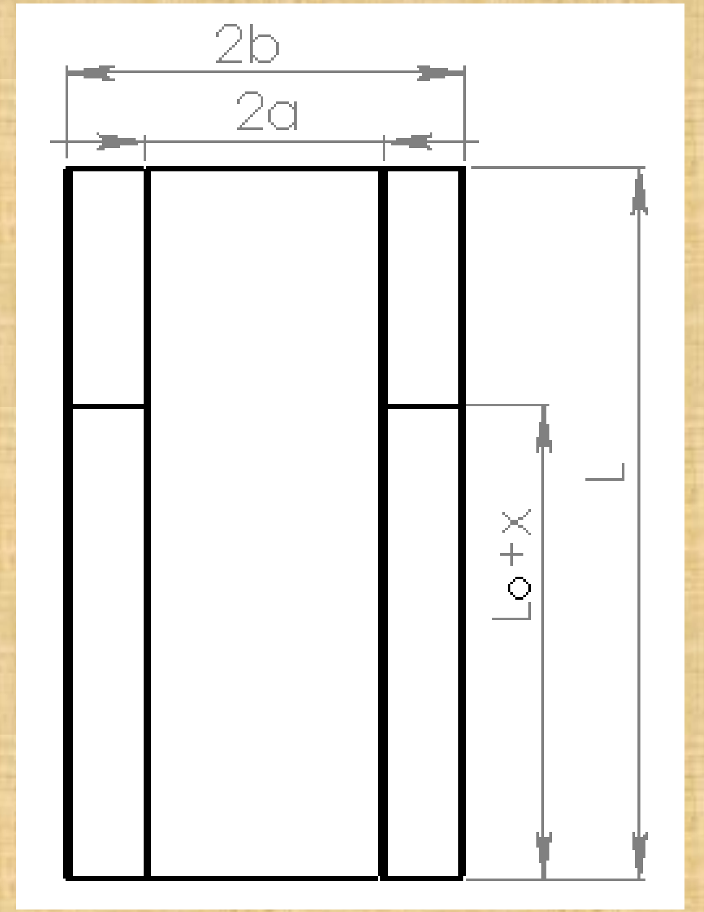
Câmpul electric, în zona vidată, respectiv , în interiorul dielectricului, are expresia:

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 S}\vec{S} \qquad \vec{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon S}\vec{S} \qquad (4)$$






2b
2a
L
Lo


2b
2a
Lo+X
L

Sarcina totală a condensatorului este:

$$Q = \lambda_1[L - (L_0 + x)] + \lambda_2[L_0 + x] = \frac{2\pi V}{\ln\frac{b}{a}}\{\varepsilon_0[L - (L_0 + x)] + \varepsilon(L_0 + x)\} \qquad (5)$$

Capacitatea condensatorului va fi:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}[L + \chi_e(L_0 + x)] \qquad (6)$$

unde $\chi_e$ este susceptibilitatea electrică a dielectricului.
Dacă sarcina Q este constantă, atunci forţa cu care dielectricul este tras în condensator, va fi:

$$F = -\frac{dE}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{\pi\varepsilon_0\chi_e V^2}{\ln\frac{b}{a}} \qquad (7)$$

$$F = \frac{Q^2}{C^2}\frac{\pi\varepsilon_0\chi_e}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\chi_e\ln\frac{b}{a}}{[L + \chi_e(L_0 + x)]^2} \qquad (8)$$

## 3. Ecuaţia deplasării lichidului dielectric

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F + \rho g L_0 \pi (b^2 - a^2) - mg \qquad (9)$$

unde m este masa lichidului dielectric care se află în condensator la momentul t.
Se consideră că suprafaţa rezervorului este mult mai mare decât $\pi(b^2 - a^2)$

$$m = \pi(b^2 - a^2)(L_0 + x)\rho \qquad (10)$$

$$F_A = \rho V_{scuf}\, g = \rho g \pi (b^2 - a^2) L_0 \qquad (11)$$

Inserând expresia masei m în relaţia (9), se obţine:

$$\frac{d}{dt}[(L_0 + x)\dot{x}] = \frac{F}{\pi\rho(b^2 - a^2)} - gx \qquad (12)$$

# 4. Mişcarea dielectricului în cazul tensiunii constante

Daca tensiunea este constantă şi se introduce o nouă variabilă: $y = L_0 + x$ ,atunci relaţia (7) se poate scrie sub forma:

$$y\ddot{y} + (\dot{y})^2 + gy = gL_0 + \frac{\varepsilon_0 \chi_0 V^2}{\rho(b^2 - a^2)\ln\frac{b}{a}} \tag{13}$$

Ecuaţia (13) se rezolvă mai uşor dacă se introduc constantele pozitive $a_0$ şi $t_0$ definite de relaţia:

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 \chi_0 V^2}{\rho g(b^2 - a^2)\ln\frac{b}{a}} = g t_0^2 \tag{14}$$

şi variabilele adimensionale:

$$\xi = \frac{y}{a_0} = \frac{L_0 + x}{a_0} \;;\; \tau = \frac{t}{t_0} \;;\quad \alpha = \frac{L_0}{a_0} \tag{15}$$

Ecuatia diferentiala (13) devine:

$$\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \xi = 1 + \alpha \tag{16}$$

Rezolvarea implică o schimbare de variabilă independentă

$$p = \frac{d\xi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{dp}{d\tau} = \frac{dp}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = p \cdot \frac{dp}{d\xi} \tag{17}$$

care reduce ecuaţia (16) la:

$$\xi \cdot p \cdot \frac{dp}{d\xi} + p^2 + \xi - 1 - \alpha = 0 \tag{18}$$

şi a cărei soluţie generală este:

$$\frac{1}{2}\xi^2 p^2 + \frac{\xi^3}{3} - \frac{1+\alpha}{2}\xi^2 = C \tag{19}$$

unde C este o constantă de integrare.

# 4.1 Aproape de margine-descriere calitativă

Relaţia (7) pentru forţă este valabilă numai când suprafaţa lichidului este departe de marginile condensatorului şi de aceea rezultatele cantitative nu sunt foarte exacte, dar evidenţiază calitativ acest fenomen.

Dacă se presupune că la t=0, lichidul este nemişcat şi tensiunea este pornită atunci mişcarea ascendentă începe cu $\xi = 0$. Cu $\alpha = 0$ , pentru că luam $L_0 = 0$ , condiţia initială $\xi(0) = 0$ cere $p(0) = \pm 1$ , cum se observă din(16) sau (18). Având în vedere că $\xi$ începe să crească imediat dupa t=0, iar în condiţiile iniţiale $\xi(0) = 0$ şi $p(0) = 1$ , atunci C=0 ( C- din relatia 19). Ca urmare (19) poate fi scrisă în forma:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}\xi} \Rightarrow \tau = \int_0^{\xi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\lambda}} = -3\sqrt{1 - \frac{2}{3}\xi} + 3 \qquad (20)$$

Din care se obţine:

$$\xi(\tau) = \frac{9 - (\tau - 3)^2}{6} = \frac{\tau(6 - \tau)}{6} \qquad (21)$$

Graficul ( fig.1) acestei funcţii vizualizează , calitativ, oscilaţia periodică a suprafeţei lichidului dielectric aproape de marginea inferioara a condensatorului, în cazul unui voltaj constant.

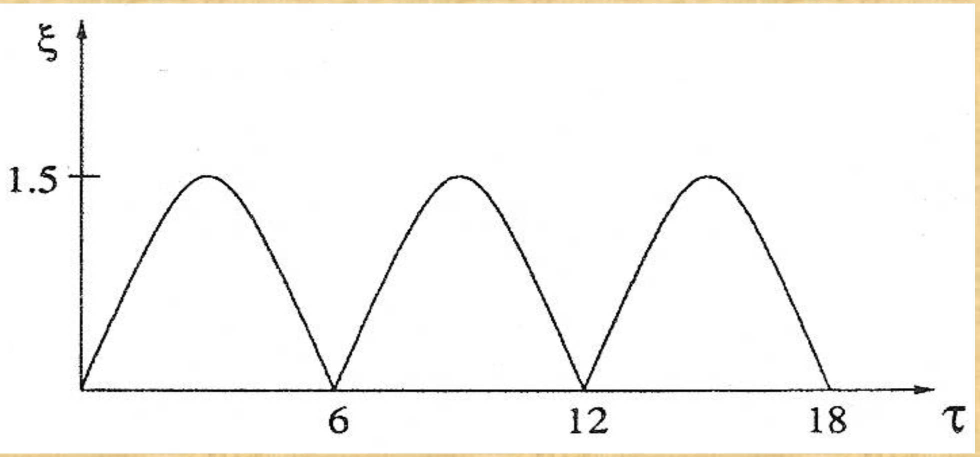



Fig. 1

# 4.2 Departe de margine- descriere cantitativă

Dacă se presupune că $L_0 \approx \frac{L}{2}$ , atunci rezultatele cantitative pot fi luate în serios.
Dacă fluidul se află în repaus când tensiunea este pornită, condiţiile initiale sunt :
$x(0) = 0 \ \ si \ \ \dot{x}(0) = 0$ , care sunt echivalente cu: $\xi(0) = \alpha \ \ si \ \ \dot{\xi}(0) = 0$, cf. cu (15).
În acest caz constanta de integrare C este dată de:

$$C = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{(1+\alpha)\alpha^2}{2} \tag{22}$$

Ecuaţia (19) devine:

$$\frac{1}{2}\xi^2 p^2 + \frac{\xi^3}{3} - \frac{1+\alpha}{2}\xi^2 = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{(1+\alpha)\alpha^2}{2} \tag{23}$$

Dacă notăm: $$V(\xi) = \frac{\xi^3 - \alpha^3}{3} - \frac{1+\alpha}{2}(\xi^2 - \alpha^2) \tag{24}$$

atunci (23) poate fi scrisă astfel: $$\frac{1}{2}\xi^2 p^2 + V(\xi) = 0 \tag{25}$$

Cum $p = \frac{d\xi}{d\tau}$ , ecuaţia (25) poate fi rezolvată sub forma:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{z \ dz}{\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}(z^2 - a^2) - \frac{1}{3}(z^3 - a^3)}} \tag{26}$$

Ecuaţia $\frac{1}{2}\xi^2 p^2 + V(\xi) = 0$ este echivalentă, în mod formal, cu aceea care descrie mişcarea unei particule cu "energie totală" zero în " potenţialul" $V(\xi)$ .

Funcţia $V(\xi)$ are următoarele proprietăţi:

(i) $V(\alpha) = 0$

(ii) $\dot{V}(\alpha) = -\alpha < 0$ , care implică $V(\xi) < 0$ , pentru $\xi$ puţin mai mare ca $\alpha$

(iii) $V(\xi) \to \infty \quad cat \quad \xi \to \infty$

(iv) există o singură soluţie pozitivă la: $\acute{V}(\xi) = 0$ şi care este $\xi_{ech} = 1 + \alpha$ , ce corespunde lui $x_{ech} = a_0$

Graficul alăturat descrie calitativ oscilaţia periodică a suprafeţei lichidului dielectric în cazul tensiunii constante.

Variabila adimensională $\xi$ este limitată între valorile: $\xi = \alpha \quad si \quad \xi = \xi_{max}$
Pentru: $\xi > \xi_{max}$ , "potenţialul" este pozitiv şi mişcarea este interzisă.

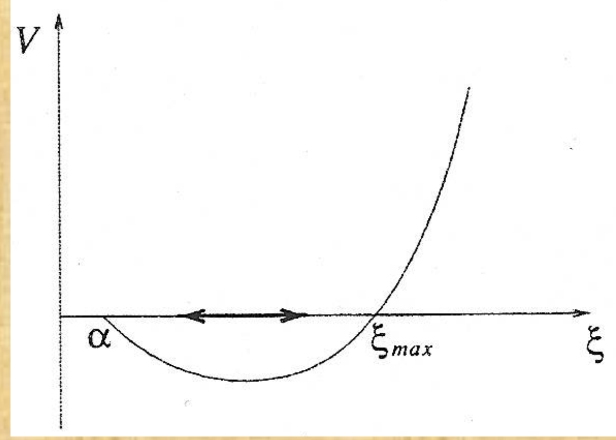



Fig.2

Amplitudinea $\xi_{max}$ este valoarea pozitivă a ecuaţiei algebrice :

$$\frac{\xi^3 - \alpha^3}{3} = \frac{1+\alpha}{2}(\xi^2 - \alpha^2) \Longrightarrow \frac{\xi^2 + \alpha\xi + \alpha^2}{3} = \frac{1+\alpha}{2}(\xi + \alpha) \qquad (27)$$

Atât timp cât: $\xi \neq \alpha$ .Această ecuaţie de ordinul al doilea pentru $\xi$ este rezolvată de:

$$\xi_{max} = \frac{1}{4}\left[3 + \alpha + 3\alpha\sqrt{1 + \frac{10}{3\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}}\right] \qquad (28)$$

În mod normal: $L_0 \gg a_0 \quad a.i. \ \alpha \gg 1$ , şi o dezvoltare binomială în acest caz, va da următoarea expresie pentru $\xi_{max}$ :

$$\xi_{max} = \frac{1}{4}\left[\alpha + 3 + 3\alpha\left(1 + \frac{5}{3\alpha}\right)\right] = \alpha + 2 \qquad (29)$$

În consecinţă: $x_{max} = 2a_0$ . De aceea suprafaţa lichidului dielectric din interiorul condensatorului oscilează periodic între: $x = 0 \ \ si \ \ x = x_{max} = 2a_0$

Din relaţia (26) se obţine perioada oscilaţiei:

$$T = \sqrt{2}t_0 \int_{\alpha}^{\xi_{max}} \frac{\xi \, d\xi}{\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}(\xi^2 - \alpha^2) - \frac{1}{3}(\xi^3 - \alpha^3)}} \qquad (30)$$

Obs. În condiţii normale de laborator, oscilaţia suprafeţei lichidului dielectric este destul de greu de observat.Este nevoie de un lichid cu densitate mică şi susceptibilitate foarte mare şi un voltaj cât mai mare posibil-opţiuni limitate de forţa dielectrică a lichidului.Intensitatea electrică a unui izolator tipic este de aproximativ $10^7 Vm^{-1}$.Cum câmpul electric maxim din interiorul condensatorului este dat de:

$$E_{max} = \frac{V}{a \ln \frac{b}{a}}$$

rezultă cu usurinţă că: $V < 10^7 a \ \ln \frac{b}{a}$

Exemplu-apa pură are: $\rho \approx 1g \ cm^{-3} \ \ si \ \ \chi_e \approx 79$. Dacă se ia a=1 cm , b=2 cm, L=20 cm, $L_0 = 10 \ cm$ şi V=5000 V, atunci din (14) si (15) se obţin valorile următoare:

$a_0 = 0{,}86 \ cm$ ,$t_0 = 30 \ ms$ şi $\alpha = 11{,}6$ astfel încât $\xi_{max} = 13{,}6$ , iar pentru amplitudinea şi perioada oscilaţiei :

$$x_{max} \approx 2a_0 = 1{,}7 \ cm \qquad\qquad T = 0{,}93 \ s$$

# 5. Sarcină constantă

Dacă în ecuaţia (12) a mişcării: $$\frac{d}{dt}[(L_0+x)\dot{x}] = \frac{F}{\pi\rho(b^2-a^2)} - gx$$

se introduce expresia (8) a forţei: $$F = \frac{Q^2}{C^2}\frac{\pi\varepsilon_0\chi_e}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\chi_e\ln\frac{b}{a}}{[L+\chi_e(L_0+x)]^2}$$

atunci ea devine: $$\frac{d}{dt}[(L_0+x)\dot{x}] = \frac{\chi_e Q^2\ln\frac{b}{a}}{4\pi^2\varepsilon_0\rho(b^2-a^2)}\frac{1}{[L+\chi_e(L_0+x)]^2} - gx \qquad (31)$$

Dacă se notează: $$\overline{a_0} = \frac{\chi_e Q^2\ln(b/a)}{4\pi^2\varepsilon_0\rho(b^2-a^2)L^2 g}$$

(32)

$$\overline{t_0} = \sqrt{\frac{\chi_e Q^2\ln(b/a)}{4\pi^2\varepsilon_0\rho(b^2-a^2)L^2 g^2}}$$

şi se efectuează aceleaşi schimbări de variabilă (15) , dar în care:

$$\alpha = \frac{L_0}{\overline{a_0}} \qquad \text{si} \qquad \sigma = \frac{\chi_e \overline{a_0}}{L} \tag{33}$$

se obţine ecuaţia , în forma adimensională:

$$\xi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \xi = \alpha + \frac{1}{(1+\sigma\xi)^2} \tag{34}$$

a cărei soluţie generală este de forma:

$$\frac{\xi^2 p^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\alpha}{2}\xi^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left[\ln(1+\sigma\xi) + \frac{1}{1+\sigma\xi}\right] = \bar{C} \tag{35}$$

$\bar{C}$ -se determină din condiţiile iniţiale: $\xi(0) = \alpha$ , $p(0) = 0$

Mişcarea poate fi descrisă, calitativ, folosind acelaşi model ca şi în cazul anterior.
dar cantitativ diferă, având alte valori numerice.
Forma “potenţialului” este aceeaşi ca cea din fig.2.
Mişcarea , în acest ultim caz, este tot periodică , dar limitată la intervalul: $\alpha \leq \xi \leq \overline{\xi_{max}}$
iar perioda este dată de o integrală complicată ce implică rădăcina pătrată a logaritmului

# 6.Concluzii

Mişcarea unui lichid dielectric atras de către un condensator cilindric vertical, constituie un exemplu neobişnuit al dinamicii unui sistem de masă variabilă.
Mişcarea dielectricului a fost studiată în condiţiile în care s-a presupus că suprafaţa dielectricului rămâne la distanţă faţă de marginile condensatorului.
Menţinând, fie voltajul constant, fie sarcina constantă, s-a constatat că mişcarea este calitativ la fel, însă cantitativ rezultatele sunt total diferite.

# Bibliografie

1. Mitoseriu L., Fizica dielectricilor
2. Nardi R., Lemos N., Dinamica unui dielectric lichid atras de un condensator cilindric